PRINCIPI DI BASE

„Es gibt nichts praktischeres, als eine gute Theorie.“

“Non c’è niente di più pratico di una buona teoria”

Attribuito a Immanuel Kant (1724-1804)

AA 2022-2023

Questo blocco di appunti si ricollega a quanto esposto nelle lezioni del prof. Viccione in merito alle basi della Meccanica dei Fluidi. Qualche differenza nei simboli è facilmente verificabile. Inoltre:
L’operatore divergenza (Div Φ). E’ equivalente a prodotto colonna per riga dell’ operatore nabla per un tensore, quindi applicato ad un vettore lo trasforma in uno scalare, applicato ad un tensore del secondo ordine lo trasforma in un vettore.
L’operatore grad Φ invece rappresenta il prodotto colonna per riga, quindi trasforma uno scalare in un vetttore, ed un vettore in un tensore (matrice) del secondo ordine.

Avvertenze

Alcune parti sono marcate in blu : vuol dire che non sono comprese nel programma di idraulica/fluidodinamica ambientale. Possono tuttavia essere interessanti, o utili per raccordare i concetti di questo corso con quelli di altri (scienza delle costruzioni, fisica tecnica, principi di ingegneria chimica etc

Neanche le parti marcate in giallo sono comprese nel programma. Sono curiosità di carattere culturale.

In corsivo gli esercizi ed applicazioni che bisogna svolgere autonomamente

Qualche richiamo di cinematica (punti di vista euleriani e lagrangiani)

Equazione indefinita dell’equilibrio idrodinamico

Equazione di Navier Stokes

Equazione globale della quantità di moto

Le Vie della Meccanica dei Fluidi

Il viscosimetro (un’utile applicazione del concetto di viscosità)

Nelle ultime pagine sono poi riportati un paio di richiami di matematica

I) Teorema Di Gauss che è utile rivedere prima iniziare lo studio dei contenuti.

II) Equazioni di bilancio

Richiami di cinematica - Punto di vista Euleriano e Lagrangiano

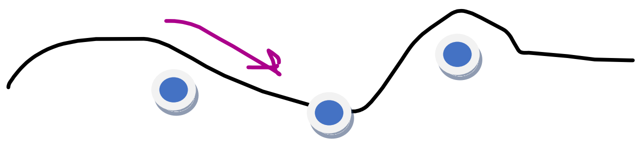
Le basi della cinematica fanno anche da collegamento con i concetti essenziali impiegati nella prima parte del corso.
Dobbiamo qui sottolineare l'importanza della relazione che lega la derivata "totale" con le derivate parziali rispetto la tempo ed allo spazio; la cosa si comprende meglio se invece di un vettore come la velocità della particella si considera prima una qualunque quantità (ad es l'energia termica, una sostanza disciolta la carica elettrica) associata alla massa.

Siano X(t), Y(t), Z(t) le funzioni che descrivono il variare della la posizione del punto materiale col tempo (in altre parole, X(t), Y(t), Z(t) sono la traiettoria del punto).
Si ha che

$$V_x = \frac{\partial X}{\partial t} \qquad Vy = \frac{\partial Y}{\partial t} \qquad Vz = \frac{\partial Z}{\partial t}$$

Sviluppando la derivata totale di B rispetto al tempo, che rappresenta la variazione della grandezza B vista da un osservatore in moto con il punto, applicando le consuete regole di derivazione di funzioni composte. Si ha

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + V_x \frac{\partial B}{\partial x} + V_y \frac{\partial B}{\partial y} + V_z \frac{\partial B}{\partial z}$$



O in termini vettoriali

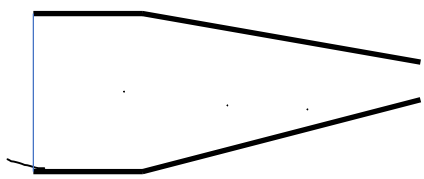
$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \vec{V} grad(B)$$

Stazionaria (permanente): termine locale =0

Dunque la variazione di B vista da un osservatore in moto con la particella (freccia viola, "lagrangiano") è somma della variazione "locale" del campo di B: $\frac{\partial B}{\partial t}$ come vista dagli osservatori fissi (cerchi blu, "euleriani") + quella dovuta al fatto che l'osservatore si muove con velocità $\vec{V}$ in un campo di B che varia nello spazio $grad(B)$ (Convettiva).

La stessa cosa si puo' fare per un vettore, ad esempio per la velocità della particella $\vec{V}$, come si è visto sopra.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$



La relazione per $\vec{V}$ si puo' anche scrivere come

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} grad(\vec{V})$$

Dunque l'accelerazione totale, vista da un osservatore in moto è somma di un'accelerazione locale $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$ e di un'accelerazione convettiva $V_x \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}$

https://www.youtube.com/watch?v=jc9qIv-jzC4

Esercizio: ripetere questi ragionamenti per un punto di cui sia nota la traiettoria e la legge del moto s(t), dove "s" è la coordinata curvilinea lungo la traiettoria stessa. Si arriva alla definizione del trinomio di Bernouilli, studiato nella prima parte del corso

Quando le derivate locali ("euleriane") sono nulle, il moto si dice uniforme.
Il moto permanente (in cui cioè tutte le derivate locali rispetto al tempo sono nulle, si dice "permanente" o "stazionario". Nel moto "uniforme" invece, le derivate spaziali sono nulle. Queste definizioni sono molto importanti.

E' evidente che anche in condizioni di moto stazionario

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ la particella può muoversi di moto accelerato

Equazione della continuità *in forma differenziale*

L' equazione di continuità rappresenta il concetto che la massa si conserva. Come si è visto nella prima parte del corso, in forma differenziale e nelle ipotesi di fluido incomprimibile risulta:

$$div(\overline{V}) = 0$$

Se invece ρ si considera variabile

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \overline{V}) = 0$$

*

In tutto questo corso si fa solo riferimento a fluidi incomprimibili; ρ è quindi sempre costante. [1]

Equazione indefinita dell'equilibrio idrodinamico

[1] Va tenuto presente che quella di "fluido incomprimibile" è un'approssimazione, poiché in realtà ρ è sempre dipendente dalla pressione e dalla temperatura. L'approssimazione è accettabile, in moto stazionario, se il "numero di Mach" Ma è abbastanza piccolo

Ma = V/C < 0,3 – 0,4

dove V è la velocità del fluido , C la celerità del suono nel mezzo.
Questa condizione va sempre verificata quando si ha a che fare con gas per controllare se un problema si può trattare con i metodi studiati in questo corso (che tratta solo fluidi incomprimibili).
Come riferimento, in condizioni standard, si ha che per l'aria C = 330 m/s, per l'acqua C = 1200 m/s

Dai principi fondamentali di Newton, si ricava la cosiddetta equazione indefinita dell'Idrodinamica. (anche: eq. "locale"). Essa costituisce l'estensione del primo principio della dinamica ai mezzi continui ed è dunque comune a tutta la meccanica del continuo. E' necessario conoscere la sua formulazione, sia in termini sia in termini vettoriali, sia tensoriali, sia scalari.
Si parte da:

$$\overline{F} = m d\overline{V} / dt \qquad (1$$

L'equazione è applicata ad un punto materiale, ed in un fluido quindi essa è riferita alla singola particella che si muove (che è il punto di vista c.d Larangiano).

Essa va particolarizzata per includere nel temine relativo alla forza $\overline{F}$ tutti i termini che rappresentano le forze agenti in un fluido: sia le forze di volume, sia quelle superficiali (sforzi o tensioni)

Si suppone qui che esista un campo di forze di massa[2] : ρ $\overline{f}$ (x,y,z,t) = ρ $\overline{g}$ (x,y,z,t), che in tutti i casi trattati in questo corso è la forza di gravità, supposta costante nello spazio e nel tempo.

Sostituendo, e svolgendo opportuni ragionamenti e passaggi, , si dimostra che

$$\rho d\overline{V} / dt = \rho \overline{f} - div\overline{\overline{\Phi}} \qquad (2$$

DE

Che è la forma utilizzata negli appunti di Viccione (verificare la corrispondenza dei simboli e il significato della divergenza di un tensore)

Utili esercizi:

- *Ricavare la forma scalare* *(2'*

- *Ricavare la forma vettoriale:*

$$\rho d\overline{V} / dt = \rho \overline{f} - \frac{\partial \overline{\Phi}_X}{\partial X} + \frac{\partial \overline{\Phi}_Y}{\partial Y} + \frac{\partial \overline{\Phi}_Z}{\partial Z} \qquad (2''$$

Va ancora ricordato che il termine $d\overline{V} / dt$ può essere ulteriormente scomposto nelle sue parti "locale" e "convettiva". Ciò servirà per trasformare il punto di vista da "Lagrangiano" a "Euleriano" , cioè relativo ad un riferimento che NON è legato al corpo. In Meccanica dei Fluidi si segue spesso (ma non sempre) il punto di vista Euleriano

Si ricavino per esercizio le forme dell' equazione indefinita 2, 2',2" , nelle ipotesi di fluido perfetto

Come diventa in termini vettoriali il termine div ($p\overline{\overline{I}}$) ?

[2] Esistono altre importanti forze "di massa" o "di volume": ad es, la forza elettrica e magnetica; le forze apparenti.

Equazione di Navier Stokes

Dall' equazione indefinita dell' equilibrio idrodinamico si passa all'equazione di Navier Stokes (slide 15 della lezione del 17 Ottobre) introducendo il legame sforzi/gradiente di velocità ("legame costitutivo")– la cui espressione semplificata, in forma scalare è data da:

Φ_{xy} = - μ (∂Vx/∂y + ∂Vy/∂x) ed analoghe (Fluido newtoniano) [3]

(μ viscosità dinamica ; [4] ν = μ/ ρ viscosità cinematica)

Il legame costitutivo viene introdotto nella parte deviata del tensore degli sforzi presente nell' equazione indefinita dell' equilibrio. Si ottiene così il seguente risultato, in termini scalari:

$$\rho \frac{DVx}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right] + \rho f_x \qquad \text{DE} \qquad \text{NS (x)} \qquad 3$$

(1) (2a) (2b) (3)

E analoghe lungo gli assi y e\ z.

E' opportuno far vedere che la 3 e le analoghe corrispondono alla forma vettoriale riportata alla fine della pag 15 della lezione Viccione del 17 ottobre

L'operatore "somma delle derivate seconde spaziali" si chiama "nabla quadro " o "laplaciano":

$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right]$$

Occorre aver ben chiaro come ciascuno dei termini dell'eq indefinita dell' equilibrio si trasforma nel corrispondente termine dell'equazione di Navier Stokes .
Sviluppare il temine dVx/dt della NS a sinistra (1) nelle sue parti convettiva e locale (da farsi dopo aver studiato i paragrafi seguenti)

Come diventa il termine 2b per un fluido perfetto?

L'equazione globale *della quantità di moto*

Come si è visto, le equazioni della meccanica dei fluidi possono essere formulate in maniera "locale" ("differenziale", "indefinita"), come si è fatto sopra, ottenendo appunto l'equazione dell' equilibrio idrodinamico e quella della continuità.

E' però spesso indispensabile esprimere le relazioni fisiche <u>in forma globale</u> con riferimento ad un volume che si definisce "volume di controllo" V_C[5] di cui S è la superficie di frontiera ("contorno"). Il volume di controllo puo' essere fisso, oppure muoversi, ma NON è legato al fluido; esso rappresenta dunque tipicamente un punto di vista <u>euleriano</u>. Il fluido entra o esce portando con sé la quantità di moto. Agiscono inoltre le forze superficiali (integrali degli sforzi) sul contorno S e le forze di massa o di volume su Vc.

Si passa così dalla forma differenziale (equazione indefinita dell' equilibrio idrodinamico) a quella integrale (equazione globale dell'idrodinamica). I passaggi per la dimostrazione sono gravosi e non è necessario svilupparli. Si ha:

[3] I termini σx σx σy per fluidi incomprimibili si trascurano

[4] Nella teoria dell'elasticità in SdC si usa un legame (legge di Hooke) che collega il gradiente dello spostamento con gli sforzi. Sempre nella SdC viene illustrata la scomposizione del gradiente dello spostamento in varie parti e la stessa cosa si fa in Meccanica dei Fluidi, però con il gradiente della velocità, poiché nel legame costitutivo compaiono le derivate spaziali della velocità e non quelle dello spostamento.

[5] Attenzione a non confondere il simbolo V, velocità con Vc, volume di controllo. Talvolta il volume è indicato con τ.

$$\int_{Vc} -\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dVc + \int_S \rho \overline{V}.V_n dS + \int_S \bar{\bar{\Phi}} \vec{n} dS + \int_{Vc} \rho \vec{g} dVc = 0$$

$$\vec{I} + \vec{M} + \vec{\Pi} + \vec{G} = 0$$ [6]

La figura seguente li illustra in maniera schematica

$$\rho d\overline{V} / dt = \overline{f} - div\overline{\overline{\Phi}}$$

Sviluppo

Integrazione ad un volume di controllo

Teor di Gauss/Gree

Teor di Gauss/Gree

$$\int_{Vc} - \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dVc + \int_S \rho \overline{V} . VndS + \int_S \overline{\overline{\Phi}} \vec{n} dS + \int_{Vc} \rho \vec{g} d\tau = 0$$

$$\vec{I} + \vec{M} + \vec{\Pi} + \vec{G} = 0$$

Eq. Globale dell' Idrodinamica (quantità di moto)

Verificare che la forma qui presentata è proprio l'equazione riportata e dimostrata nella lezione di Viccione del 19 Ottobre, slide 10; nella forma indicata qui, però il termine contenente la derivata rispetto and n della velocità è incluso nel termine Π

[6] Le espressioni ed i simboli sono quelli comunemente impiegati in Meccanica dei Fluidi. E' bene considerare che i segni dipendono dalle convenzioni adottate

E' **necessario** comprendere:

-La divisione del termine di accelerazione totale (in blu nel disegno) nella parte locale e convettiva

- la trasformazione del termine degli sforzi div $\overline{\overline{\Phi}}$ (integrato al volume) in $\vec{\Phi} n$ (integrato sulla superficie di frontiera). Lo strumento matematico che permette questa trasformazione (in verde) è il teorema di Gauss.

Spesso (sempre, nelle applicazioni di questo corso) il termine $\vec{\Pi}$ viene diviso in due parti: uno relativo alle sole pressioni, ed uno relativo agli sforzi tangenziali.
Il primo – che è l'unico presente nei fluidi perfetti - diventa[7]:

$$\int_S p\overline{n}.dS$$

(Dimostrazione per esercizio, ricordando la forma matriciale dello sforzo)

Il secondo deriva dal legame costitutivo (legge di Stokes) che lega il gradiente della velocità con gli sforzi tangenziali, e risulta essere.

$$\int_S \mu \cdot \partial \overline{V} / \partial n.dS$$

La dimostrazione è complessa, ed anche l'applicazione. La sua utilità però è limitata a casi in cui esiste una componente della velocità tangente alla frontiera del dominio, e quindi la forma diventa assai più semplice e si riduce alla formulazione scalare del legame costitutivo:

$\Phi_{xy} = \mu\ (\partial Vx/\partial y + \partial Vy/\partial x)$ ed analoghe (Fluido newtoniano)

Infine, i termini relativi al flusso di quantità di moto, del tipo

$$\vec{M} = \int_S \rho \overline{V} V_n dS$$

richiedono lo sviluppo dell' integrale del vettore. Tuttavia, nell'ipotesi, frequentemente verificata, che le sezioni attraverso cui avviene l'ingresso o l'uscita del fluido siano perpendicolari ai vettori velocità, si ha.

$$\vec{M} = \int_S \rho V^2 \vec{n} dS$$

Dove $\vec{n}$ è il versore della superfice (nelle nostre convenzioni orientato verso l'interno di Vc).

Spesso si assume ancora che

$$\vec{M} = \int_S \rho V^2 \vec{n} dS = \rho V_m{}^2 S \beta \vec{n}$$

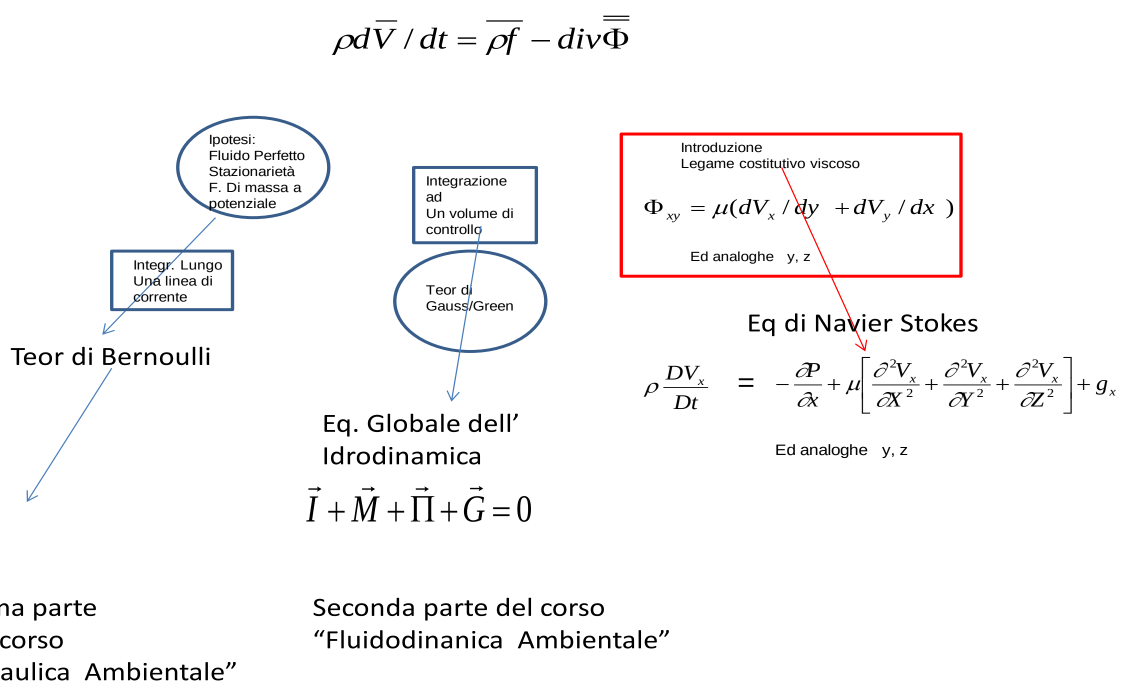
7 Un'importante avvertenza riguarda i segni dei vari termini: essi dipendono dalle convenzioni sono possibili diverse forme, a seconda che si assuma positivo il verso della normale entrante od uscente positivi oppure negativi gli sforzi di trazione. Un modo possibile per non disorientarsi è quello di mettere tutti i termini a sinistra, adottare la convenzione desiderata per le normali e lasciarsi guidare dal significato fisico per la scelta dei segni. In questi appunti le normali sono considerate positive entranti, come spesso in Meccanica dei Fluidi (nella meccanica dei solidi si usa spesso la convenzione opposta).

e cioè che l'integrale di V^2 sia esprimibile col prodotto della velocità media Vm per la superficie S, per un fattore β, chiamato "coefficiente di ragguaglio" o "coefficiente di Coriolis ".[8] . β è eguale ad 1 solo se il profilo di velocità è costante, ma viene spesso egualmente assunto come unitario per comodità.

Ricavare la formula che definisce β

LE VIE DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

Nella figura seguente è esposto lo schema logico dei principali strumenti della meccanica dei fluidi: muovendo dall'equazione indefinita dell'equilibrio idrodinamico (= quantità di moto) , si possono seguire diverse strade:



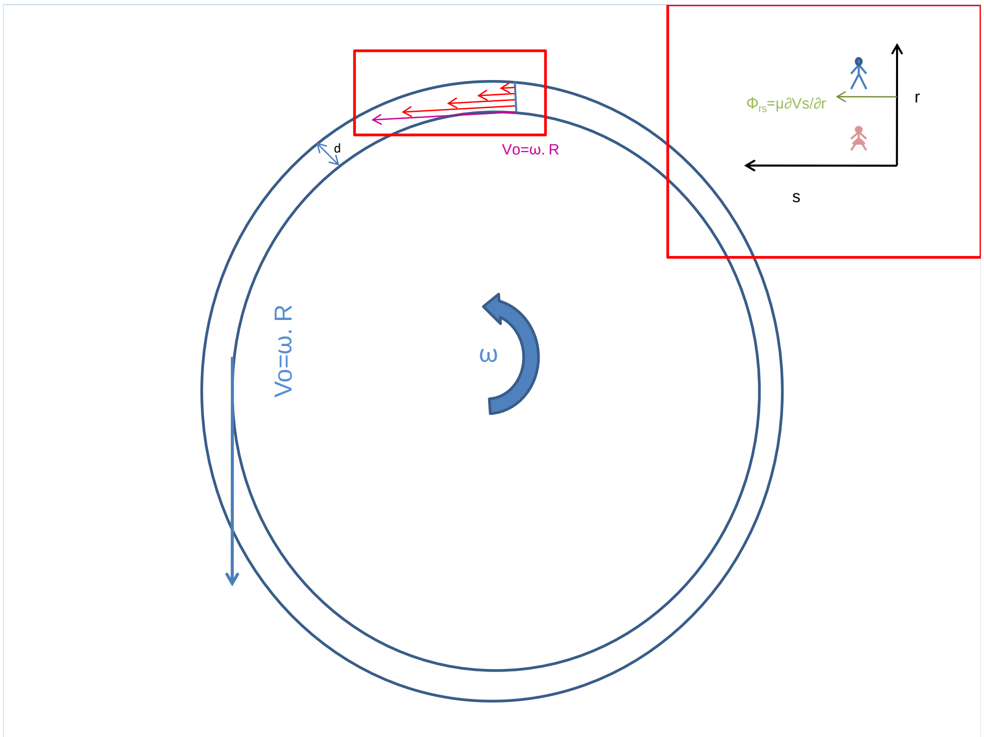
I percorsi a sinistra ed al centro (in blu) sono quelli tradizionali dell'Idraulica, essenziali per molti problemi pratici, e sono quelli seguiti in questo corso. Il percorso a destra, indicato in rosso, prevede la formulazione differenziale completa (quindi, con l'aggiunta del legame costitutivo=NS). Questa via è divenuta di pratica utilità solo negli ultimi quarant'anni con lo sviluppo della Meccanica dei Fluidi Numerica (CFD, Computational Fluid Mechanics), e richiede uno studio apposito ed approfondito: la sua formulazione essenziale (equazione di Navier Stokes) deve essere però compresa fin da adesso, per meglio inquadrare molti problemi.
Si ricorda che accanto all'equazione delle quantità di moto va sempre considerata anche l'equazione della continuità, anch'essa esprimibile in forma differenziale o in forma integrale. Essa è però molto più semplice da trattare. In particolare per essa il passaggio alla forma integrale è banale utilizzando il teorema di Gauss/Green

[8] Il concetto è simile, ma la definizione diversa, rispetto a quello dell'altro coefficiente di Coriolis α che compare nel teorema di Bernouilli

Applicazione Moto viscoso in un sistema molto semplice (Viscosimetro)

Un albero di diametro R ruota con velocità angolare ω in una cavità di raggio R+d. C'è quindi una cavità larga d, che si può considerare (poiché d<<R) rettangolare e di profondità (perpendicolare al foglio) unitaria.
Si crea nel fluido un campo di moto molto semplice: l'unica componente di velocità non nulla è quella tangenziale Vs, che vale :
Vs = 0 sulla superficie esterna
Vs = Vo= ω R sulla superficie interna.
(Il diagramma della velocità è quello visto da un osservatore fisso; la velocità relativa fluido-solido è sempre 0)
La derivata della velocità ∂Vs/∂r è dunque = Vo/d
Lo sforzo tangenziale interno esercitato in direzione s sulla superficie di normale r vale dunque
Φrs = μ (∂Vs/∂r)= **μ Vo/d**
Qual'è il suo verso?
Se si intende lo sforzo che gli strati interni esercitano su quelli esterni (osservatrice sull'osservatore), il verso è quello della freccia verde.
Se si intende lo sforzo che gli strati esterni esercitano su quelli interni (l'osservatore sull' osservatrice), il verso è quello <u>opposto alla freccia verde.</u>

Lo schema è alla base di un semplice strumento per misurare la viscosità μ. Ad esempio, si impone la velocità angolare ω, e si misura il momento resistente Mr.
Qual è la relazione risolutiva che lega μ con Mr?



Mr= Φrs *R*2 *π*R= μ (∂Vs/∂r) *2 *π*R^2 = **μ Vo/d** *2 *π*R^2

I) IL TEOREMA DI GAUSS ("LEMMA DI GREEN")

Le applicazioni del Teorema di Gauss (o lemma di Green) sono assai frequenti in Meccanica dei Fluidi ed nelle discipline collegate; gran parte dei testi vi fanno continuo e frequente riferimento.
Nel seguito tale teorema - solitamente dimostrato in forma scalare nei testi di Analisi elementare - è espresso in termini vettoriali, senza pretesa di completezza o di rigore formale ed al solo scopo di inquadrare in un unica formulazione le numerose applicazioni alla MdF .

Sia VC un volume di controllo, S la sua superficie di frontiera, $\overline{n}$ la normale positiva entrante, $\overline{\overline{T}}$ un tensore del secondo ordine; si ha

$$\int_S \overline{\overline{T}}.\overline{n}dS = -\int_{Vc} div\overline{\overline{T}}.dV \qquad (*)$$

("L'integrale della divergenza di un tensore è eguale al flusso del tensore sulla frontiera")

La (*) può facilmente essere applicata ad un vettore anziché ad un tensore del secondo ordine (si pensi al caso del flusso q di massa o di energia):

$$\int_S \overline{T}.\overline{n}dS = -\int_{Vc} div\overline{T}.dV$$

Una applicazione importante di questa relazione si trova in tutti i casi in cui si passa dalla formulazione locale a quella globale delle equazioni cosiddette di bilancio, e cioè quelle della massa (continuità) e della quantità di moto (Equazione globale dell'idrodinamica). In quest'ultima $\overline{\overline{T}}$ (o $\overline{\overline{\Phi}}$) è il tensore degli sforzi

L'esempio più semplice è quello della continuità. Si applichi, come esercizio, il teorema di Gauss all' equazione della continuità stabilendo il collegamento tra la forma globale e quella differenziale.

L'applicazione all' equazione della quantità di moto ("equazione dell' equilibrio idrodinamico") è più complessa, ma analoga.

Esempio
Limitandosi ad un caso particolare, si faccia riferimento alle ipotesi di "fluido perfetto"
In tali ipotesi, ed a maggior ragione in quelle dell' idrostatica (sforzi tangenziali nulli, sforzi normali eguali fra di loro), il tensore T è diagonale e sferico e si ha dunque

$$\overline{\overline{\Phi}} = p\ \overline{\overline{I}}$$

dove p è la pressione ed $\overline{\overline{I}}$ è la matrice identica, si ha anche

$$\mathrm{div}\,(p\,\bar{\bar{I}}) = \mathrm{grad}\,(p) \qquad (**)$$

nonché

$$\bar{\bar{T}}.\bar{n} = p\,\bar{n} \qquad (***)$$

come si verifica facilmente sulle componenti.

Tramite la (***) e la (**), la (*) diventa

$$\int_{Vc} div(p\bar{\bar{I}})dV = -\int_{S} p\bar{n}.dS \qquad (****)$$

ovvero

$$\int_{Vc} grad(p\bar{\bar{I}})dV = -\int_{S} p\bar{n}.dS \qquad (*)$$

che è la forma che alcuni testi impiegano, dopo averla derivata direttamente dalla forma scalare del teorema di Gauss, per presentare l ' equazione globale dell'idrostatica.

II) Le **equazioni di bilancio**

Questo paragrafo (che non è parte del programma di esame) interrompe la successione logica dei concetti di meccanica del continuo. Esso non fa parte del programma di esame; tuttavia, una volta acquisito, serve a comprendere meglio i termini della c.d. "equazione globale", illustrata sopra, ed anche il "Teorema di Bernoulli" studiato nella prima parte del corso.
Parte dei contenuti che seguono sono comuni al corso di Principi di Ingegneria Chimica; esso aiuta quindi a a riconoscere gli stessi concetti espressi in maniera lievemente diverse nelle due discipline

Si chiamano "conservative" quelle funzioni di campo b(x, y, z, t) per cui si può scrivere una "equazione di bilancio", e cioè una equazione, relativa ad un volume di controllo, che abbia la forma

"Variazione" = "flusso attraverso la frontiera" + "Produzione ".

Le equazioni di bilancio sono conseguenza diretta dei principi fondamentali della fisica applicati ai corpi continui: i casi considerati in questo corso sono unicamente quelli del bilancio di massa (equazione di continuità) e quello della quantità di moto (equazione dell'idrodinamica)

Attraverso questi esempi ci si rende conto che la grandezza b(x, y, z, t) di cui si fa il bilancio può essere sia un vettore, sia uno scalare; le grandezze conservative sono solitamente (ma non sempre) associate alla massa, tanto che spesso è conveniente assumere :

$$b(x, y, z, t) = \rho\,(x, y, z, t)*c(x, y, z, t)$$

dove ρ (x, y, z, t) è la densità e c(x, y, z, t) è la grandezza specifica relativa alla massa; per fissare le idee, si pensi alla quantità di moto, $\rho\,(x, y, z, t).\vec{V}\,(x, y, z, t)$: in questo caso c(x, y, z, t) è proprio la velocità.

Ancora, nel caso del bilancio dell'energia termica e(x, y, z, t), è talora opportuno evidenziare che:

$$e(x, y, z, t) = r(x, y, z, t) * Cs * T(x ,y, z, t)$$

dove Cs è il calore specifico del mezzo e T(x, y, z, t) è ovviamente la temperatura.

La forma generale di un'equazione di bilancio in forma globale, e riferita ad un volume di controllo V_C di cui S è la superficie di frontiera ("contorno), si scrive

(1a) (1b) (2) (3)

$$\int_{Vc} -\frac{\partial b}{\partial t}\,d\tau + \int_{S} b\overline{V}..\vec{n}dS + \int_{S} \vec{\Phi}_b dS + \int_{Vc} P_b d\tau = 0$$

Se b(x, y, z, t) è un vettore (il solo caso importante è la quantità di moto: $\rho(x, y, z, t)\,\vec{V}(x , y, z, t)$ = ,la relazione di bilancio qui sopra sostanzialmente non cambia; l'unica avvertenza è che nel termine (1b) il prodotto $b\overline{V}..$ diventa un prodotto tensoriale $b\overline{V}..\overline{V}..$ e quindi si ha:

E quindi

$$\int_{S} \rho(\overline{V}\overline{V}).\overline{n}.dS = \int_{S} \rho\overline{V}V_n dS$$

mentre, naturalmente, tutti gli altri termini salgono di un ordine (i vettori diventano tensori, gli scalari, tensori)

Il termine (1a) è la variazione temporale della grandezza; in altre parole il suo accrescimento o la sua diminuzione (ad es, per la quantità di moto, l'accelerazione locale, indicata nel seguito e nel libro come $\vec{\mathrm{I}}$; riscaldamento o raffreddamento se b è l'energia termica).

(1b) "Flusso convettivo" è il trasporto della grandezza b con il fluido, attraverso le pareti; quando infatti esiste un flusso di fluido, evidentemente a questo si accompagna un trasporto della grandezza b che è associata al fluido (ad es. Flusso di quantità di moto $\overline{\rho V}$ indicato nel seguito come $\vec{\mathrm{M}}$: se entra fluido in un volume di controllo entra evidentemente anche la quantità di moto o il flusso termico, cioè l ' energia termica ad esso associata).

(3) è la produzione (intesa anche in senso algebrico, quindi anche distruzione) di b; nel caso della quantità di moto essa è semplicemente l'azione delle forze di massa, in particolare del peso $\rho\vec{\mathrm{g}}$, indicata nel seguito come $\vec{\mathrm{G}}$. Considerando ancora l ' esempio dell'energia termica, la produzione può essere causata da una reazione chimica esotermica, la distruzione da una reazione endotermica)

Il termine (2) "Flusso diffusivo "è stato lasciato per ultimo perché una sua possibile definizione è quella "per esclusione": esso è il flusso di b che NON è associato al flusso di massa. In termini di quantità di moto essa è l'integrale dell'azione degli sforzi superficiali $\overline{\overline{\phi}}.\vec{n} = \vec{\phi}_n.\vec{n}$ indicata nel seguito come $\vec{\Pi}$ Esso ha alla sua origine i fenomeni che avvengono su base molecolare e cioè non i movimenti "visibili" di massa (che sono descritti dal termine (1b)) bensì effetti derivanti da azioni microscopiche (interazioni tra molecole).

Il flusso di calore per conduzione ne è un esempio evidente e tipico; ma altrettanto evidente è il fatto che - nell'equazione globale dell'Idrodinamica le forze che agiscono alla superficie del volume di controllo costituiscono un flusso di quantità di moto (cioè <u>una forza</u>) non associato al movimento di massa bensì alla pressione o alla viscosità (entrambi effetti a carattere molecolare, come si comprende considerando la teoria cinetica dei gas) [9]

Si è già detto dei segni dei vari termini: sono possibili diverse forme, a seconda che si assuma positivo il verso della normale entrante od uscente positivi oppure negativi gli sforzi di trazione.

Tutte le equazioni di bilancio possono essere espresse in forma globale - che è quella che abbiamo esaminato ora - oppure in forma differenziale (anche: "indefinita"). Si passa dall'una all'altra forma impiegando il teorema di Gauss, ed alcuni passaggi intermedi che - in particolare per il caso dei fluidi compressibili - possono essere abbastanza complessi.

[9] L'introduzione degli sforzi di Reynolds in regime turbolento (che verrà trattata in seguito) consiste nello spostare il trasporto di q.d.m associato alle fluttuazioni turbolente da $\vec{M}$ a $\vec{\Pi}$ ed a considerarle appunto come sforzi. Analogamente per i flussi turbolenti di energia termica, sostanza disciolta, etc